

Classification
Physics Abstracts
41.10D

Charges convectées par écoulements laminaires et turbulents dans des tubes de section rectangulaire

G. Touchard, G. Dominguez et K. Madani

U.A. 191 du CNRS, 40 avenue du Recteur Pineau, 86022 Poitiers Cedex, France

(Reçu le 9 avril 1990, révisé le 17 décembre 1990, accepté le 4 mars 1991)

Résumé. — Dans cette étude, nous analysons le phénomène de transport de charges électriques par convection dans un tube de section rectangulaire. Il nous faut tout d'abord définir le champ des vitesses hydrodynamiques. Dans le cas laminaire, une solution analytique peut être obtenue, aussi bien pour la vitesse que pour la densité volumique de charge en faisant l'hypothèse des faibles densités. A partir de ces résultats, nous calculons alors la densité volumique de charge transportée par un écoulement laminaire. Dans le cas d'un écoulement turbulent, la complexité du phénomène aussi bien hydrodynamique que d'électrisation, nous oblige à nous ramener au cas monodimensionnel de deux plans parallèles. Une expression de la vitesse moyenne axiale et de la vitesse fluctuante transversale est proposée ainsi qu'une modélisation de la nouvelle répartition de la charge. Les courants d'écoulement en turbulent peuvent alors être calculés. Nous présentons ensuite les conditions expérimentales ainsi qu'une confrontation entre les expériences réalisées en écoulement laminaire et turbulent avec les prévisions théoriques.

Abstract. — This study relates the phenomenon of streaming currents by flow in a pipe of rectangular cross section. We compute at first the velocity profile in the case of a laminar flow. Then with the assumption of a weak space charge density an analytical solution for the space charge density profile in such pipe and for that kind of flow is also obtained. Thus we give the expression of the space charge density convected by a laminar flow. In the case of a turbulent flow the space charge convected is computed in the case of two parallel walls. At least, the experimental conditions and the confrontation between experiments and theoretical predictions are presented.

1. Introduction.

Nous avons étudié le phénomène de transport de charges par écoulement d'un hydrocarbure liquide dans une conduite de section rectangulaire représentée figure 1. La charge à la paroi, les dimensions des deux côtés de la section et la conductivité du liquide sont les paramètres caractéristiques du phénomène dans le cas d'un écoulement laminaire. En écoulement turbulent, deux autres paramètres interviennent également : le nombre de Reynolds et le rapport du coefficient de diffusion moyen des ions sur la viscosité cinématique du liquide.

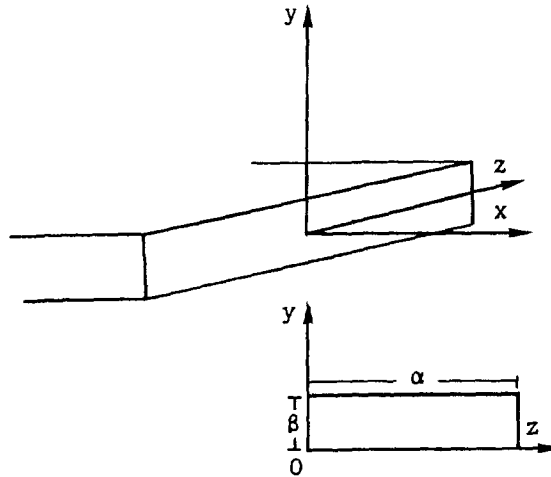


Fig. 1. — Géométrie de la section rectangulaire.

[Rectangular cross section geometry.]

2. Charge transportée en écoulement laminaire.

2.1 EQUATIONS HYDRODYNAMIQUES. — Les équations de Navier-Stokes dans le cas d'un écoulement laminaire stationnaire et symétrique d'un fluide incompressible dans un tube de section rectangulaire, figure 1, s'écrivent :

$$\Delta U = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

\dot{U} vitesse selon l'axe x
 μ viscosité dynamique du fluide
 dP/dx : gradient de pression.

Le champ des vitesses est soumis aux conditions à la frontière de type Dirichlet homogènes. La solution est trouvée grâce aux fonctions de Green et s'exprime :

$$u(y, z) = - \frac{16}{\mu \pi^4} \frac{dP}{dx} T \quad (2)$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sin [(\pi/2 \alpha) (2n+1) (z + \alpha)] \sin [(\pi/2 \beta) (2\ell+1) (y + \beta)]}{(2n+1) (2\ell+1) [((2n+1)/2 \alpha)^2 + ((2\ell+1)/2 \beta)^2]}$$

où α et β représentent respectivement la plus grande et la plus petite longueur de la section rectangulaire du tube.

Nous avons tracé les lignes d'isovitesse à partir de l'équation (2) pour différentes valeurs du rapport α/β , figure 2. On constate que lorsque α/β devient importante, le profil tend vers un profil monodimensionnel (écoulement entre deux plans parallèles, profil de Poiseuille).

2.2 EQUATIONS DE LA COUCHE DIFFUSE. — Dans l'hypothèse d'une faible densité volumique de charge, comme nous l'avons explicité dans une publication précédente [1], les équations de la couche diffuse établie s'expriment, en grandeur adimensionnelle :

$$\text{grad} (-\Delta \psi + \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}) = 0 \quad \Delta \psi = -\rho \quad (3)$$

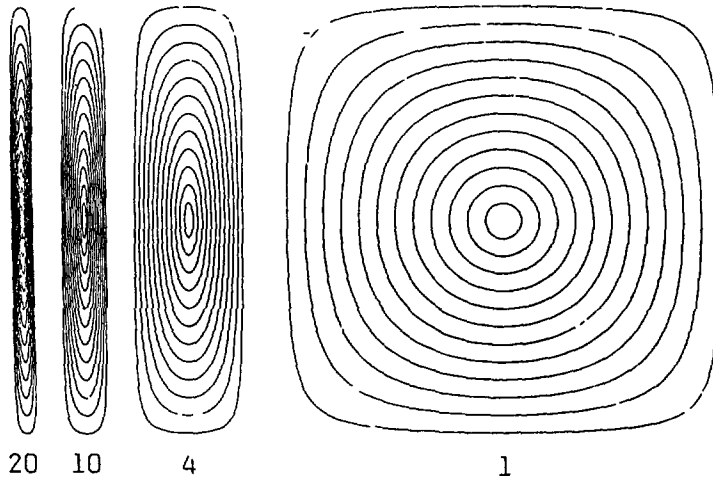


Fig. 2. — Lignes d'isovitesse pour différents rapports α/β (1, 4, 10, 20).

[Lines of constant velocity for several ratios α/β (1, 4, 10, 20).]

ψ potentiel électrique

α_C . paramètre faisant intervenir les coefficients de diffusion des ions [1]

ρ . densité volumique de charge.

La densité volumique de charge, solution du système (3) est représentée par la série des fonctions propres suivantes :

$$\rho = \rho_p - A \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} S \tag{4}$$

avec :

$$S = \frac{16 \left[\frac{(2K+1)^2 \pi^2}{4\alpha^2} + \frac{(2\ell+1)^2 \pi^2}{4\beta^2} \right] \left[\sin \frac{\pi(2K+1)(z+\alpha)}{2\alpha} \sin \frac{\pi(2\ell+1)(y+\beta)}{2\beta} \right]}{\pi^2(2K+1)(2\ell+1) \left[\frac{(2K+1)^2 \pi^2}{4\alpha^2} + \frac{(2\ell+1)^2 \pi^2}{4\beta^2} + \alpha_C^2 \right]}$$

ρ_p étant la densité volumique de charge à la paroi et A une constante.

2.3 TRANSPORT DE CHARGES EN ÉCOULEMENT LAMINAIRE. — Compte tenu de l'équation (4), la charge Q convectée dans toute la section s'écrit :

$$Q = \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} R \tag{5}$$

$$R = \frac{16 A(\alpha\beta) \left[\frac{\rho_p}{A} \left(\frac{(2K+1)^2 \pi^2}{4\alpha^2} + \frac{(2\ell+1)^2 \pi^2}{4\beta^2} + \alpha_C^2 \right) - V \right]}{M(2K+1)^2(2\ell+1)^2 \left[\left(\frac{2K+1}{2\alpha} \right)^2 \left(\frac{2\ell+1}{2\beta} \right)^2 \right] \left[\frac{(2K+1)^2 \pi^2}{4\alpha^2} + \frac{(2\ell+1)^2 \pi^2}{4\beta^2} \right]}$$

avec :

$$V = \frac{(2K+1)^2 \pi^2}{4\alpha^2} + \frac{(2\ell+1)^2 \pi^2}{4\beta^2}$$

M étant une constante donnée par :

$$M = \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{16\alpha\beta}{(2K+1)^2(2\ell+1)^2 [((2K+1)/2\alpha)^2 + ((2\ell+1)/2\beta)^2]} \quad (6)$$

Le transport de charge en régime laminaire est fonction de la densité volumique de charge à la paroi ρ_p (qui caractérise la propriété d'absorption préférentielle des ions), des dimensions de la section rectangulaire α et β et du coefficient α_c .

La figure 3 montre l'évolution de la charge convectée en écoulement laminaire lorsqu'on fait varier les deux paramètres géométriques qui caractérisent le phénomène (α_c , ρ_p et l'épaisseur de couche diffuse δ_0 étant fixés). On peut remarquer que la densité volumique de charge convectée tend vers une valeur constante lorsque le rapport α/β devient grand.

Dans ce cas en effet on tend vers une structure proche de deux plans parallèles. Par contre lorsque α décroît, la structure se rapproche d'un carré et la charge convectée est plus importante. Par exemple dans ce cas pour $\alpha = \beta = 1$ mm la charge convectée est environ 1,75 fois celle prévisible pour deux plans parallèles avec $\beta = 1$ mm.

A ce propos, il est intéressant de noter que la charge convectée par le même liquide dans un tube de section circulaire de 1 mm de rayon [2] serait d'environ 2,67 fois celle convectée entre deux plans parallèles dont $\beta = 1$ mm.

Ainsi le tube de section circulaire conduisant à la même densité volumique de charge que le tube de section carré de 2 mm de côté aurait un diamètre de 2,46 mm.

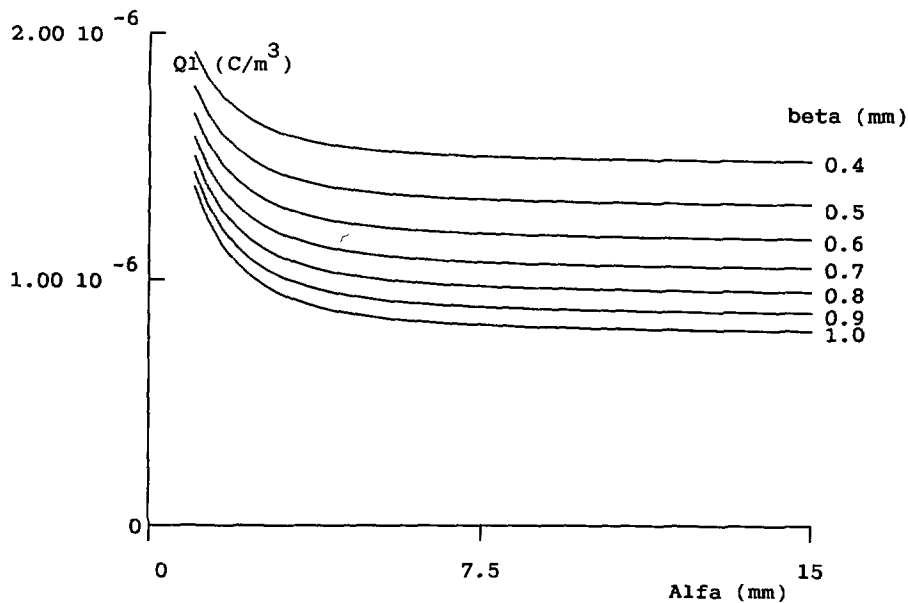


Fig. 3. — Evolution de la charge convectée en régime laminaire ($\alpha_c = 0,973$, $\delta_0 = 4,2 \times 10^{-2}$ mm, $\rho_p = 1,4 \times 10^{-4}$ C/m³).

[Charge convected in laminar flow ($\alpha_c = 0,973$, $\delta_0 = 4,2 \times 10^{-2}$ mm, $\rho_p = 1,4 \times 10^{-4}$ C/m³).]

3. Charges transportées en écoulement turbulent.

3.1 EQUATIONS HYDRODYNAMIQUES. — Pour cette étude nous supposons l'écoulement monodimensionnel (cas de deux plans parallèles). De plus nous ferons l'hypothèse de parois parfaitement lisses.

Ainsi en posant :

$$\phi = U/v_* \quad \text{et} \quad \eta = (\beta - y)/v_*\nu$$

avec U : vitesse moyenne axiale, v_* : vitesse de frottement et ν : viscosité cinématique du liquide.

On définit généralement trois régions en écoulement turbulent :

a) *La sous-couche laminaire* ($\eta \leq \eta_1 = 3,8$).

Dans cette zone, la diffusivité turbulente est négligeable, le profil des vitesses est alors représenté par :

$$\phi(\eta) = \eta. \quad (7)$$

b) *La zone de transition* ($3,8 = \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2 = 30,7$).

La diffusivité moléculaire et la diffusivité turbulente sont du même ordre de grandeur, le profil peut être exprimé par la loi empirique suivante :

$$\phi(\eta) = 0,131 \operatorname{argtg} [\ln(\eta) - 2,0] + 8,2. \quad (8)$$

c) *La zone centrale* ($\eta \geq \eta_2 = 30,7$).

La diffusivité est essentiellement turbulente, le profil est alors donné par [3] :

$$\phi(\eta) = 2,5 [\ln(\eta) + 2,733]. \quad (9)$$

3.2 EQUATIONS DE LA COUCHE DIFFUSE.

a) *Profil d'une couche diffuse au repos entre deux plans parallèles.*

Le système d'équations adimensionnel s'écrit :

$$\rho \, d\rho/dy + \alpha_C^2 \, d\psi/dy = 0; \quad d^2\psi/dy^2 = -\rho. \quad (10)$$

La solution à ce système s'exprime :

$$\rho = \rho_P \operatorname{Ch}(\alpha_C y) / \operatorname{Ch}(\alpha_C \beta). \quad (11)$$

b) *Profil d'une couche diffuse perturbée par un écoulement turbulent.*

Dans le cas d'un écoulement turbulent, la valeur quadratique moyenne de la vitesse fluctuante transversale $\langle V_P' \rangle$ perturbe la couche diffuse. Cette vitesse peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} \langle V_P' \rangle / v_* &= 0,1615 \operatorname{arg} \operatorname{Sh}(\eta/2,5 - 2,014) + 0,234 \quad \text{si} \quad \eta \leq 62 \\ \langle V_P' \rangle / v_* &= 0,85 \quad \text{si} \quad \eta \geq 62. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la vitesse de relaxation d'une couche diffuse dans l'hypothèse des faibles densités est égale à $\delta_0 \sigma / \varepsilon$ [4] (δ_0 étant l'épaisseur de couche diffuse). Lorsque la vitesse de

relaxation est supérieure à la vitesse fluctuante, il n'y a pas de perturbation et inversement. Pour un nombre de Reynolds suffisamment grand, en fait dès l'apparition de la turbulence dans le cas du liquide utilisé, la limite de la zone perturbée est toujours située dans la sous-couche laminaire. Dans ces conditions, nous pouvons calculer la charge convectée.

3.3 TRANSPORT DE CHARGES EN ÉCOULEMENT TURBULENT. — La densité volumique de charge moyenne dans la zone perturbée est donnée par :

$$\rho_t = \frac{1}{\alpha y_p} \int_0^{y_p} \rho \alpha dy = \frac{\rho_p}{\alpha_c(\beta - \eta_p \nu/v_*)} \frac{\text{Sh} [\alpha_c(\beta - \eta_p \nu/v_*)]}{\text{Ch} (\alpha_c \beta)} \quad (12)$$

$y_p = (\beta - \nu \eta_p/v_*)$ étant l'ordonnée de la limite de la zone perturbée. La charge transportée s'écrit alors :

$$Q_t = \frac{\rho_t v_*}{\beta \bar{U}_m} \int_0^{y_p} U(y) dy + \frac{v_*}{\beta \bar{U}_m} \int_{y_p}^{\beta} \rho(y) U(y) dy \quad (13)$$

\bar{U}_m étant la vitesse moyenne du débit.

En posant :

$$Q_t = Q_{t1} + Q_{t2}$$

$$Q_{t1} = \frac{\rho_t v_*}{\beta \bar{U}_m} \left[\int_0^{y_2} 2,5(\ln(\eta) + 2,733) dy + \int_{y_1}^{y_2} (0,131 \operatorname{argtg}(\ln(\eta) - 2) + 8,2) dy + \int_{y_1}^{y_p} \eta dy \right] \quad (14)$$

avec

$$y_1 = \beta - \nu \eta_1/v_* \quad \text{et} \quad y_2 = \beta - \nu \eta_2/v_*$$

$$Q_{t2} = \frac{v_*}{\beta \bar{U}_m} \int_{y_p}^{\beta} \rho_p \frac{\text{Ch}(\alpha_c y)}{\text{Ch}(\alpha_c \beta)} \eta dy \quad (15)$$

Soit en fonction du nombre de Reynolds :

$$Q_t = \frac{\rho_p}{\alpha_c(\beta - 5 \eta_p D_h/\text{Re}^{7/8})} \frac{\text{Sh} [\alpha_c(\beta - 5 \eta_p D_h/\text{Re}^{7/8})]}{\text{Ch}(\alpha_c \beta)} + \frac{\rho_p}{\text{Ch}(\alpha_c \beta)} \frac{\text{Re}^{7/8}}{5 D_h} \left[\frac{\text{Ch}(\alpha_c \beta)}{\alpha_c^2} - \frac{\text{Ch}(\alpha_c(\beta - 5 \eta_p D_h/\text{Re}^{7/8}))}{\alpha_c^2} - W \right] \quad (16)$$

avec :

$$W = \frac{5 \eta_p D_h}{\text{Re}^{7/8}} \frac{\text{Sh} [\alpha_c(\beta - 5 \eta_p D_h/\text{Re}^{7/8})]}{\alpha_c}$$

$D_h = \text{Re} \nu / \bar{U}_m$, étant le rayon hydraulique de la conduite.

Comme dans le cas d'un tube de section circulaire la charge convectée en écoulement turbulent pour des faibles densités volumiques de charge est pratiquement indépendante du nombre de Reynolds, figure 4.

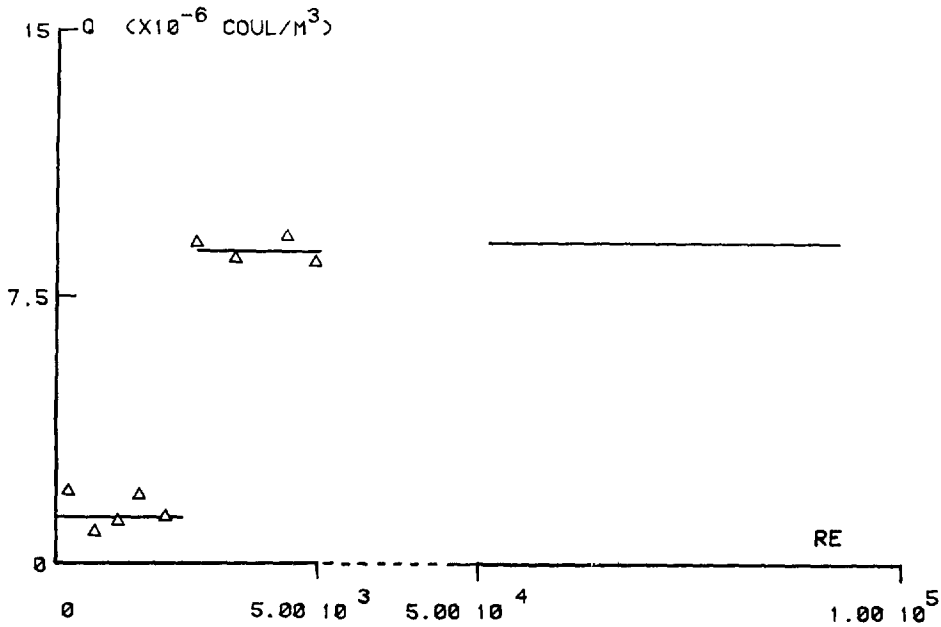


Fig. 4. — Charge transportée en fonction du nombre de Reynolds. (—) Courbe théorique ; (Δ) Points expérimentaux.

[Charge convected in terms of Reynolds member (—) Theoretical curve ; (Δ) Experimental data.]

4. Expériences.

4.1 MONTAGE EXPÉRIMENTAL. — Le montage expérimental que nous avons utilisé a servi à d'autres essais au sein de notre laboratoire [5]. Par contre, nous avons monté un tube de section rectangulaire à la place de tubes capillaires de section circulaire.

4.2 EXPÉRIENCES ET CONFRONTATION. — Nous avons utilisé deux liquides différents : de l'heptane sans additif et de l'heptane avec 1 ppm d'OLOA 218 A. Cependant nous ne donnerons que les résultats obtenus pour l'heptane avec additifs car les mesures étaient peu reproductibles pour l'heptane sans additifs. L'OLOA 218 A est un phénate de calcium à environ 42 % de matière active dont environ 7 % de CaCO_3 colloïdal. Le tube est en acier inoxydable et nous avons opéré à la température ambiante. La conductivité du liquide est $1,35 \times 10^{-11} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$. Les dimensions géométriques de la section du tube sont : $\alpha = 15 \text{ mm}$ et $\beta = 0,6 \text{ mm}$. La densité volumique de charge convectée en écoulement laminaire pour l'heptane avec 1 ppm d'OLOA est de l'ordre de 10^{-6} C/m^3 , ce qui donne ρ_P de l'ordre de 10^{-4} C/m^3 . La charge transportée en écoulement turbulent est environ 7 à 10 fois supérieure à celle pour un écoulement laminaire. Les prévisions théoriques présentent un accord satisfaisant avec les expériences, figure 4.

5. Conclusion.

La partie théorique de cette étude a montré que la charge transportée en écoulement laminaire dépend, non seulement des trois paramètres : ρ_P , diamètre hydraulique adimensionnel et coefficient α_C (comme c'est le cas dans un tube de section circulaire [4]), mais également du facteur de forme α/β .

Le calcul de la charge transportée en écoulement turbulent a été fait dans l'hypothèse où $\alpha \gg \beta$ et où la limite de la zone perturbée est située dans la sous-couche laminaire.

Les expériences effectuées pour un liquide et une géométrie de tube correspondant à cette hypothèse, montrent un accord satisfaisant avec les prévisions théoriques.

Bibliographie

- [1] TOUCHARD G., DUMARGUE P., La couche diffuse dans une conduite de section circulaire et entre 2 plans parallèles, *Electrochimica Acta* **20** (1975) 125-135.
- [2] TOUCHARD G., DUMARGUE P., Transport de charges électriques par convection d'un liquide diélectrique dans une conduite cylindrique métallique, *J. Electroanal. Chem.* (1978) 387-405.
- [3] COMPTE-BELLOT G., Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles, Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air n **419** (1965).
- [4] TOUCHARD G., BORZEIX J., SAUNIERE S., Electrification des fluides en mouvement dans des conduites, *R.G.E.* **7/8** (1985) 592-602.
- [5] TOUCHARD G., Streaming currents developed in laminar and turbulent flows through a pipe, *J. Electrostat.* **5** (1978) 463-476.